Trigonometrie

Teil 1

Geometrie

Sinus, Kosinus und Tangens

im rechtwinkligen Dreieck

Text Nr. 16001

Stand 28. April 2010

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

DEMO für www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text wurde völlig neu konzipiert. Mein alter Text mit ähnlichem Inhalt war eher ein Unterrichtsmanuskript. Jetzt habe ich mich stark an die Bedürfnisse des Lernenden angelehnt.

Daher rückt die Theorie mehr in den Hintergrund. Musterbeispiele mit ausführlichen Erklärungen und Trainingsaufgaben mit Musterlösungen stehen im Vordergrund. Damit kann man diesen Text auch gezielter im Unterricht einsetzen, z. B. mit Beamern oder in Moodle-Systemen.

Dennoch darf das Verständnis nicht zu kurz kommen. Daher gibt es folgende Abschnitte, welche dem Verständnis bzw. der Begründung dienen. Erst wenn man versteht, warum man dies so macht, und was Zweck und Nutzen ist, kommt Verständnis in die Mathematik.

Hinweis zur Genauigkeit

Man kann getrost stets das Gleichheitszeichen verwenden. Das Ungefährzeichen $a \approx 5{,}7\text{ cm}$ ist sinnlos, denn es gibt in der Geometrie ja überhaupt keine exakten Werte, da alle Maßeingaben eine Messgenauigkeit haben. Hält man sich also daran, die Angaben einheitlich (z. B. auf 1 Dezimale) zu runden, dann kann man stets = schreiben und liegt ziemlich richtig.

Ich weiß, dass diese Angaben stark vereinfacht sind, und dass es Situationen gibt, in denen man anders vorgehen muss. Doch dies alles hier auszuführen, würde zu weit gehen.

DEMO für www.mathe-cd.de

Inhalt

1 **Grundwissen** 4

1.1 Wie kommt man im rechtwinkligen Dreieck auf Sinus und Kosinus? 4

1.2 Grundwissen zu Sinus und Kosinus 7

Trainingsaufgaben 9

1.3 Grundwissen zum Tangens 10

Trainingsaufgaben 11

2 **Etwas Theorie zur Herleitung einiger wichtiger Werte** 12

3 **Aufgaben und Beispiele zur Berechnung rechtwinkliger Dreiecke** 15

4 Grundaufgaben

4 **Berechnung von Figuren mit rechtwinkligen Teildreiecken** 17

4.1 Gleichschenklige Dreiecke 17

4.2 Flächeninhalt beliebiger Dreiecke 18

4.3 Kreisabschnitte 19

4.4 Kreisbogenzweieck 20

4.5 Beliebiges Dreieck 21

4.6 Trapez 22

5 **Anwendungsaufgaben (Höhenberechnungen)** 23

5.1 Einfache Höhenberechnung 23

5.2 Prinzip der gekoppelten Dreiecke 23

5.3 Prinzip der geschachtelten Dreiecke 24

Trainingsaufgaben: Dreiecke und Parallelogramme 25

Lösungen 27

DEMO für www.mathe-cd.de

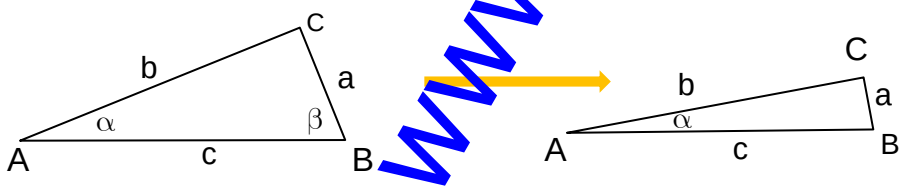
2 Etwas Theorie zur Herleitung einiger wichtiger Werte.

Man sollte sich folgende Werte merken:

	Sinus	Kosinus	Tangens
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	Kein Wert (∞)

Diese Werte kann man alle unter Anwendung des Satzes von Pythagoras berechnen. Dies wird ab und zu im Unterricht exemplarisch gezeigt, kann aber auch als Übungs- oder gar Textaufgabe gestellt werden.

2.1 Die Werte zum Winkel $\alpha = 0^{\circ}$ macht man sich am besten als Grenzwerte klar:
Das Problem liegt nämlich darin: Es gibt kein echtes rechtwinkliges Dreieck mit diesem Winkel.



Es gilt: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$. Verkleinert man a bei gleichbleibendem c, dann wird $\sin\alpha$ immer kleiner. Für $a \to 0$ folgt auch $\sin\alpha \to 0$.

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$ Verkleinert man a bei gleichbleibendem b, dann wird $\tan\alpha$ immer kleiner. Für $a \to 0$ folgt auch $\tan\alpha \to 0$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ Verkleinert man a bei gleichbleibendem c, dann nähert sich b dem Wert von c an, und damit geht $\frac{b}{c} \to 1$, also $\cos\alpha \to 1$

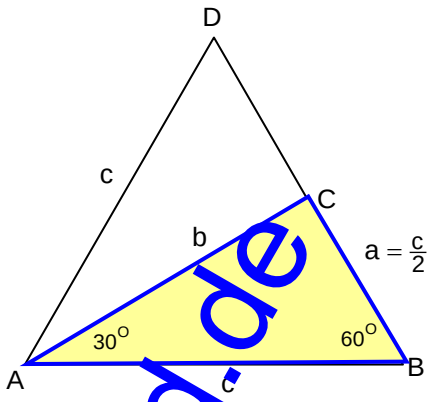
2.2 **Wenn $\alpha \to 0$ geht**, dann geht $\beta \to 90^{\circ}$. Das hat zur Folge:

$$\cos\beta = \sin\alpha = \frac{a}{c} \to 0, \quad \sin\beta = \cos\alpha = \frac{b}{c} \to 1 \quad \text{und}$$

$$\tan\beta = \frac{b}{a} \to \infty \quad \text{weil der Nenner gegen 0 geht.}$$

DEMO für www.mathe-cd.de

2.3 Nun betrachten wir ein Dreieck mit $\alpha = 30^{\circ}$.



Ich habe es durch Halbierung eines gleichseitigen Dreiecks ABD erzeugt.

Ein gleichseitiges Dreieck hat drei gleich lange Seiten und alle Winkel sind 60° groß.

Durch die Halbierung von A aus sind zwei rechtwinklige Dreiecke entstanden mit diesen Eigenschaften: $\alpha = 30^{\circ}$ und die Gegenkathete a ist halb so lang wie die Grundseite c.

Die Seite b errechnen wir mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:

$$b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = c^2 \qquad \text{Ergibt:} \qquad b^2 = c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = c^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{4c^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{3c^2}{4}$$

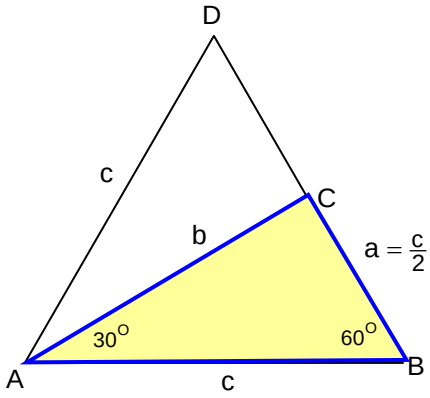
Nun zieht man teilweise die Wurzel: $b = \sqrt{\frac{3c^2}{4}} = \frac{c}{2}\sqrt{3}$

Damit können wir Sinus, Kosinus und Tangens zu 30° berechnen:

$$\sin 30^{\circ} = \frac{a}{c} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \cos 30^{\circ} = \frac{b}{c} = \frac{\frac{c}{2}\sqrt{3}}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan 30^{\circ} = \frac{a}{b} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{c}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{Erweitert man mit } \sqrt{3}: \qquad \tan 30^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2.4 Dasselbe Dreieck hat $\beta = 60^{\circ}$.



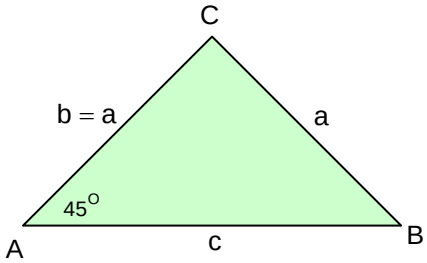
$$\sin 60^{\circ} = \frac{b}{c} = \cos 30^{\circ} = \frac{\frac{c}{2}\sqrt{3}}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 60^{\circ} = \frac{a}{c} = \sin 30^{\circ} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^{\circ} = \frac{b}{2} = \frac{\frac{c}{2}\sqrt{3}}{\frac{c}{2}} = \sqrt{3}$$

2.5 Ein rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 45^{\circ}$ ist gleichschenklig!

Nach Pythagoras gilt: $a^2 + a^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 2a^2$ und $c = a\sqrt{2}$



$$\sin 45^{\circ} = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos 45^{\circ} = \frac{b}{c} = \frac{a}{c} = \sin 45^{\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan 45^{\circ} = \frac{a}{b} = \frac{a}{a} = 1$$

DEMO für www.mathe-cd.de

2.6 Aus der Tabelle von Seite 12 erkennt man diesen interessanten Zusammenhang:

$\cos 0^{\circ} = \sin 90^{\circ}$

$\cos 30^{\circ} = \sin 60^{\circ}$

$\cos 45^{\circ} = \sin 45^{\circ}$

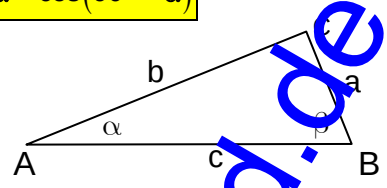
$\cos 60^{\circ} = \sin 30^{\circ}$

$\cos 90^{\circ} = \sin 0^{\circ}$

Allgemein gilt:

$\boxed{\cos\alpha = \sin\left(90^{\circ} - \alpha\right)}$

$\boxed{\sin\alpha = \cos\left(90^{\circ} - \alpha\right)}$



Den Grund für diese Beziehungen erkennt man schnell am rechtwinkligen Dreieck:

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$ und es ist $\alpha + \beta = 90^{\circ}$ also gilt $\beta = 90^{\circ} - \alpha$ usw.

Beispiele:

$\sin 25^{\circ} = \cos 65^{\circ}$

$\sin 58^{\circ} = \cos 32^{\circ}$

$\cos 44^{\circ} = \sin 46^{\circ}$

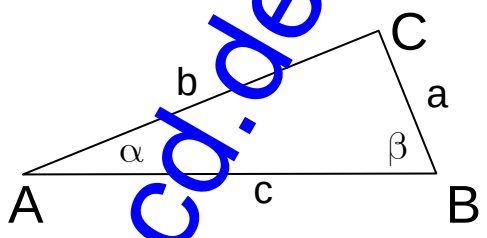
$\cos 12^{\circ} = \cos 78^{\circ}$

DEMO für www.mathe-cd.de

3 Aufgaben und Beispiele zur Berechnung rechtwinkliger Dreiecke

Grundaufgabe 1: Gegeben 1 Kathete und die Hypotenuse

Beispiel 1: Gegeben sind die Seiten c = 8,0 cm, a = 3,0 cm.



1. Schritt: Will man α berechnen, muss klar sein, dass dann a dazu die Gegenkathete ist. c ist immer die Hypotenuse, wenn $\gamma = 90^\circ$ ist.

Dann gilt: $\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c}} \Rightarrow \alpha \approx 22{,}0^\circ$.

2. Schritt: Um b zu berechnen (b ist die Ankathete) hat man zwei Möglichkeiten

1. mit der Kosinusfunktion

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos\alpha = 7{,}4 \text{ cm}$$

2. mit der Tangensfunktion:

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\tan\alpha} = 7{,}4 \text{ cm}$$

Schließlich fehlt noch der 2. Winkel: $\beta = 90^\circ - \alpha = 68{,}0^\circ$.

Beispiel 2: Gegeben sind die Seiten c = 7,0 cm, b = 5,0 cm.

1. Schritt: Berechnung von α: oder Berechnung von β:

$\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow \alpha = 44{,}4^\circ$

2. Daraus folgt β:

$\beta = 90^\circ - \alpha = 45{,}6^\circ$

$\sin\beta = \frac{b}{c} \Rightarrow \beta = 45{,}6^\circ$

Daraus folgt α:

$\alpha = 90^\circ - \beta = 44{,}4^\circ$

3. Schritt: Berechnung von a:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $a = c \cdot \sin\alpha$

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$, $a = b \cdot \tan\alpha$

$\cos\beta = \frac{a}{c}$, $a = c \cdot \cos\beta$

$\tan\beta = \frac{b}{a}$, $a = \frac{b}{\tan\beta}$

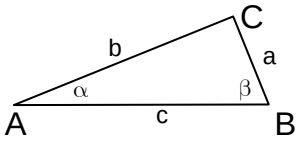
Alle vier Berechnung führen zu $a \approx 4{,}9$ cm.

Hinweis: Man einigt sich meistens darauf, statt $\approx$ das Gleichheitszeichen zu verwenden.

Man erkennt, wie viele Möglichkeiten diesen Methoden bieten!

DEMO für www.mathe-cd.de

Grundaufgabe 2: Gegeben sind beide Katheten



Beispiel 3: **Gegeben sind die Seiten a = 8,0 cm, b = 3,0 cm.**

1. Schritt: Berechnung von α oder: Berechnung von β:

$\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right) = 69{,}4^{\circ}$ $\tan\beta = \frac{b}{a} \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{8}\right) = 20{,}6^{\circ}$

2. Schritt: Berechnung von β Berechnung von α:

$\beta = 90^{\circ} - 69{,}4^{\circ} = 20{,}6^{\circ}$ $\alpha = 90^{\circ} - \beta = 69{,}4^{\circ}$

3. Schritt: Berechnung von c: (Eine von 4 Möglichkeiten):

$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{\cos\alpha}$ $\sin\beta = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{\sin\beta}$ $\cos\beta = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\cos\beta}$

Ergebnis in jedem Fall: $c = 8{,}5\text{ cm}$.

Grundaufgabe 3: Gegeben sind 1 Winkel und eine Kathete

Beispiel 4 **Gegeben sind b = 6,5 cm und $\alpha = 52^{\circ}$**

1. Schritt: Aus α wird β berechnet: $\beta = 90^{\circ} - \alpha = 38^{\circ}$

2. Schritt: a berechnen oder c berechnen

$\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \cdot \tan\beta$ oder $\tan\beta = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\tan\beta}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha}$ oder $\sin\beta = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{\sin\beta}$

3. Schritt: c berechnen bzw. a berechnen:

$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha}$ $\cos\beta = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\cos\beta}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \sin\alpha$ $\cos\beta = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \cos\beta$

Ergebnisse: $a = 8{,}3\text{ cm}$, $c = 10{,}6\text{ cm}$

Grundaufgabe 4: Gegeben sind 1 Winkel und die Hypotenuse

Beispiel 5: **Gegeben sind c = 10,0 cm und $\alpha = 53^{\circ}$**

1. Schritt: Aus α wird β berechnet: $\beta = 90^{\circ} - \alpha = 37^{\circ}$

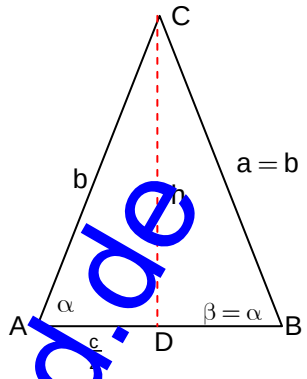
2./3. Schritt: $\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \sin\alpha$, $a = 8{,}0\text{ cm}$ $\Longleftrightarrow$ $\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos\alpha$, $b = 6{,}0\text{ cm}$ oder $\sin\beta = b \Rightarrow b = c \cdot \sin\beta$, $b = 6{,}0\text{ cm}$ $\Longleftrightarrow$ $\cos\beta = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \cos\beta$, $a = 8{,}0\text{ cm}$

Trainingsaufgaben auf Seite 25

DEMO für www.mathe-cd.de

4 Berechnung von Figuren mit rechtwinkligen Teildreiecken.

4.1 Gleichschenklige Dreiecke



Beispiel 1: Gegeben: b = 8,0 cm, $\alpha = 70^\circ$.

a) Berechne die Grundseite c und die Höhe h.

b) Stelle eine Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes nur aus den gegebenen Größen b und α auf.

Lösung:

a) Die Höhe zur Grundseite zerlegt ABC in zwei rechtwinklige Teildreiecke.

Im Teildreieck ADC ist b die Hypotenuse, weil b dem rechten Winkel gegenüber liegt.

Daher gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{c}{2}}{b} = \frac{c}{2b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = 2b\cdot\cos\alpha} \approx 5{,}5\text{ cm}$$

ACHTUNG: Keine Doppelbrüche verwenden. Steht im Zähler ein Bruch, dann schreibt man ihn ganz normal in den Hauptbruch: $\frac{\frac{c}{2}}{b} = \frac{c}{2\cdot b}$

Wegen der Symmetrie ist $a = c$.

Den Winkel γ berechnet man über die Winkelsumme:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0, \text{ d.h. } 2\alpha + \gamma = 180^0 \Rightarrow \gamma = 180^\circ - 2\alpha = 40^\circ$$

Die Höhe h_c = CD ist im Teildreieck ACD eine Kathete, und zwar die Gegenkathete zu α:

$$\sin\alpha = \frac{h}{b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = b\cdot\sin\alpha}$$

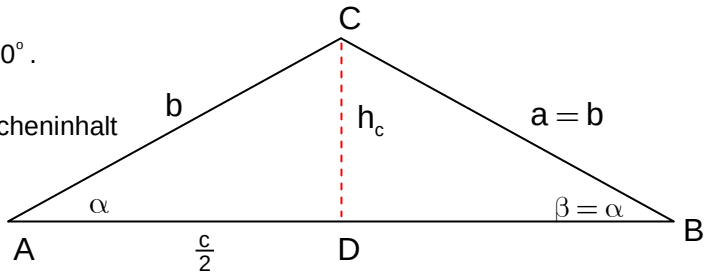
b) Damit erstellt man die Formel für den Flächeninhalt:

Aus $A = \frac{1}{2}c\cdot h_c$ sowie $c = 2b\cdot\cos\alpha$ und $h = b\cdot\sin\alpha$ folgt:

$$\boxed{A = \tfrac{1}{2}c\cdot h_c = \tfrac{1}{2}\underbrace{2b\cdot\cos\alpha}_{c}\cdot\underbrace{b\cdot\sin\alpha}_{h_c} = b^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

Der Taschenrechner liefert das Ergebnis $A = 20{,}6\text{ cm}^2$

Beispiel 2: Gegeben: c = 15,0 cm, $\alpha = 48{,}0^\circ$.



Berechne b und stelle eine Formel für den Flächeninhalt in Abhängigkeit von c und α auf.

Im **rechtwinkligen Teildreieck ADC** gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{c}{2}}{b} = \frac{c}{2b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{c}{2\cdot\cos\alpha} \approx 11{,}2\text{ cm}.$$

Höhe: $\tan\alpha = \frac{h_c}{\frac{c}{2}} \quad \Rightarrow \quad h_c = \frac{c}{2}\cdot\tan\alpha \approx 8{,}33\text{ cm}$

Dreiecksinhalt: $A_\triangle = \frac{1}{2}c\cdot h_c = \frac{1}{2}c\cdot\frac{c}{2}\cdot\tan\alpha$

$$\boxed{A_\triangle = \frac{c^2}{4}\cdot\tan\alpha}$$

$A_\triangle = 62{,}47\text{ cm}^2$

DEMO für www.mathe-cd.de

Lösungen

DEMO für www.mathe-cd.de

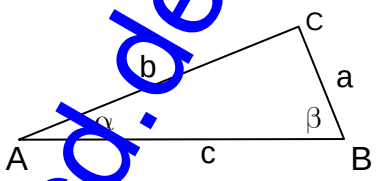
Trainingsaufgaben 5

Berechne die fehlenden Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks ($\gamma = 90^{\circ}$) zu:

Es gibt verschiedene Wege, hier wird nur ein Lösungsbeispiel gezeigt.

Versuche, möglichst nur die gegeben Stücke zu verwenden, aber nicht den „Pythagoras“.

Wenn man eine (falsch) berechnete Größe weiter verwendet, hat man ein Problem!



a) $a = 47{,}0\text{ cm}$ und $\beta = 38{,}0^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60^{\circ} - \beta = 52^{\circ}$

$\cos\beta = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a}{\cos\beta} = 59{,}64\text{ cm}$

$\tan\beta = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad b = a \cdot \tan\beta = 36{,}72^{\circ}$

b) $\alpha = 32{,}0^{\circ}$ und $c = 6{,}4\text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \beta = 90^{\circ} - \alpha = 58^{\circ}$

$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad a = c \cdot \sin\alpha = 3.39\text{ cm}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad b = c \cdot \cos\alpha = 5{,}43\text{ cm}$

c) $a = 6{,}0\text{ cm}$ und $b = 2{,}5\text{ cm}$

$\tan\alpha = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{6}{2{,}5}\right) = 67{,}4^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \beta = 22{,}6^{\circ}$

$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a}{\sin\alpha} = 6{,}50\text{ cm}$

d) $a = 120{,}0\text{ cm}$ und $\alpha = 41{,}0^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \beta = 90^{\circ} - \alpha = 49^{\circ}$

$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a}{\sin\alpha} = 182{,}9\text{ cm}$

$\tan\alpha = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a}{\tan\alpha} = 138{,}0\text{ cm}$

e) $a = 15{,}8\text{ m}$ und $c = 24{,}3\text{ m}$

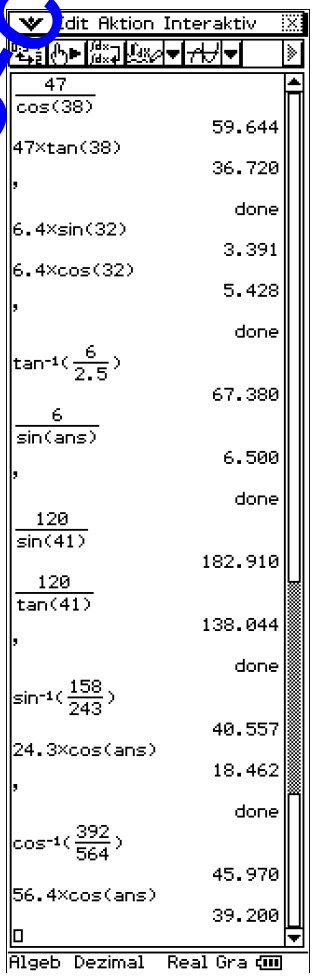
$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{15{,}8}{24{,}2}\right) = 40{,}6^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \beta = 49{,}4^{\circ}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad b = c \cdot \cos\alpha = 18{,}5\text{ cm}$

f) $b = 39{,}2\text{ km}$ und $c = 56{,}4\text{ km}$

$\sin\beta = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad \beta = \sin^{-1}\left(\frac{39{,}2}{56{,}4}\right) = 46{,}0^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 44{,}0^{\circ}$

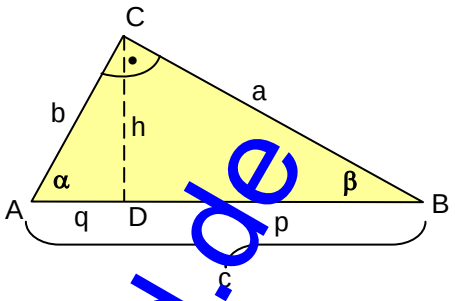
$\cos\beta = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad a = c \cdot \cos\beta = 39{,}2\text{ km}$



DEMO für www.mathe-cd.de

Trainingsaufgaben 6

Berechne p, q und h im Dreieck ABC



(1) trigonometrisch und
(2) mit Kathetensatz und Höhensatz (falls möglich)

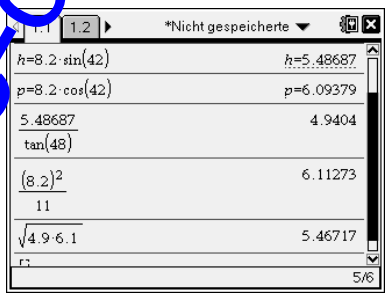
d1) $\alpha = 48^0$ und $a = 8{,}2$ cm

$\beta = 90^O - \alpha = 42^O$

$\sin\beta = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \sin\beta = 5{,}5$ cm

$\cos\beta = \frac{p}{a} \Rightarrow p = a \cdot \cos\beta = 6{,}1$ cm

$\tan\alpha = \frac{h}{q} \Rightarrow q = \frac{h}{\tan\alpha} = 4{,}9$ cm



d2) Alternativ zuerst: $\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{8.2}{\sin 48} = 11{,}0$ cm

Dann mit dem Kathetensatz: $a^2 = c \cdot p \Rightarrow p = \frac{a^2}{c} = 6{,}1$ cm

und $q = c - p = 11\,\text{cm} - 6{,}1\,\text{cm} = 4{,}9$ cm

und mit dem Höhensatz: $h^2 = p \cdot q \Rightarrow h = \sqrt{p \cdot q} = 5{,}5$ cm

e1) $c = 16{,}0$ cm und $\alpha = 84^O \Rightarrow \beta = 6^O$

$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \sin\alpha = 15{,}9$ cm

$\cos\beta = \frac{p}{a} \Rightarrow p = a \cdot \cos\beta = 15{,}8$ cm, $q = c - p = 0{,}2$ cm

$\sin\beta = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \sin\beta = 1{,}7$ cm

DEMO für www.mathe-cd.de